

ΑΓΜΑ (MEM-100) – Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Άσκηση 1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων που (i) διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$, (ii) εφαπτέται της ευθείας $x - y = 2$.

Άσκηση 2. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που (i) είναι παράλληλη στην $y = 2x + 3$, (ii) είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{2}x$, (iii) διέρχεται από το σημείο $A(5, 0)$.

Άσκηση 3. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που έχει μέσο το σημείο $M(1, -1)$.

Άσκηση 4. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων:

(i) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 - 10x + 12y - 20 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 - 4ax + 10by + 4a^2 + 16b^2 = 0$

Άσκηση 5. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων $C_1: x^2 + y^2 = 1$ και $C_2: (x - 1)^2 + y^2 = 4$.

Άσκηση 6. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου:

(i) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ στο σημείο $A(1, -1)$

(ii) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 - 3b^2 = 0$ στο σημείο $A(a, -b)$

Άσκηση 7. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$ είναι ίσος με 2.

Άσκηση 8. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $x = 1$.

Άσκηση 9. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα x όταν (i) έχει εστία $E(-1, 0)$, (ii) έχει διευθετούσα την ευθεία $x = -\frac{1}{2}$, (iii) διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

Άσκηση 10. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Να αποδειχθεί ότι η κορυφή της παραβολής είναι το πλησιέστερο σημείο από την εστία της.

Άσκηση 11. Να βρεθούν τα σημεία $A(x, y_1)$, $B(x, y_2)$ της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$, τέτοια ώστε η γωνία $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 12. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ όταν (i) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$, (ii) είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x$, (iii) διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$.

Άσκηση 13. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ στα σημεία $A(4, 4)$ και $B(-1, \frac{1}{4})$ τέμνονται κάθετα και πάνω στη διευθετούσα της.

Άσκηση 14. Έστω M ένα σημείο της παραβολής $y^2 = 2px$. Να δειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο EM , όπου E η εστία της παραβολής, εφαπτεται του άξονα y .